(Un)Gleichungen I

Gleichung: $f(x)=0,\quad f: \underbrace{M}_{\text{Grundmenge}} \to \mathbb{K},\quad \mathbb{L}=\{x\in M \mid f(x)=0\}$

$\mathbb{L}=\emptyset \Leftrightarrow$ unlösbar $\qquad \#\mathbb{L}=1 \;\hat{=}\;$ eindeutig lösbar

Lineare Gleichung

$$ax-b=0 \;\rightarrow\; \mathbb{L}=\begin{cases}\{\frac{b}{a}\}, & \text{falls } a\neq 0\\ \mathbb{R}, & \text{falls } a=b=0\\ \emptyset, & \text{falls } a=0 \wedge b\neq 0\end{cases}$$

Quadratische Gleichung

$$ax^2+bx+c=0 \;\rightarrow\; \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R} \mid ax^2+bx+c=0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{x^2+px+q=0}_{\text{Normalform}}\}$$

$D=(\frac{p}{2})^2-q$
Diskriminante

$$\rightarrow \mathbb{L}=\begin{cases}\{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\} & \text{falls } D>0\\ \{-\frac{p}{2}\} & \text{falls } D=0\\ \emptyset & \text{falls } D<0\end{cases}$$

quadratische Ergänzung

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-D$$

$(-\frac{p}{2}, -D)$ ← Scheitelpunkt

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$

Nullstellen: x_1, x_2; Linearfaktoren: $(x-x_1)(x-x_2)$

$p=-(x_1+x_2)$
$q=x_1\cdot x_2$

Gleichung mit gebrochen rationalen Funktionen

z.B. $\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}=\text{polynom}$

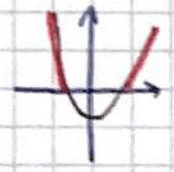
1) Grundgesamtheit bestimmen (Nullstellen der Nenner!)
2) Mit Nennern multiplizieren (keine Brüche mehr)
3) Löse polynomiale Gleichung

(Un) Gleichungen II

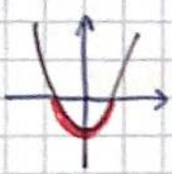
Lineare Ungleichung

$$ax + b \geq 0 \rightarrow \mathbb{L} = \begin{cases} [-\frac{b}{a}, \infty) & \text{falls } a > 0 \\ (-\infty, -\frac{b}{a}] & \text{falls } a < 0 \\ \mathbb{R} & \text{falls } a = 0 \wedge b \geq 0 \\ \emptyset & \text{falls } a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

Quadratische Ungleichung



$$x^2 + px + q \geq 0 \rightarrow \mathbb{L} = \begin{cases} (-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}] \cup [-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \infty) & \text{f. } D > 0 \\ \mathbb{R} & \text{f. } D \leq 0 \end{cases}$$



$$x^2 + px + q \leq 0 \rightarrow \mathbb{L} = \begin{cases} [-\frac{p}{2} - \sqrt{D}, -\frac{p}{2} + \sqrt{D}] & \text{f. } D > 0 \\ \{-\frac{p}{2}\} & \text{f. } D = 0 \\ \emptyset & \text{f. } D < 0 \end{cases}$$

Wurzelgleichungen

- für welche x ist die Gleichung definiert?
  (Radikand ≥ 0) (Ergebnis der Wurzel ≥ 0)
- umformen (z.B. quadrieren)
- lösen

Hugo
Geht
Als
Quelle

Geometrisches Mittel ≤ Arithmetisches Mittel

$$G = \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_m} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m} = A$$

$$G = A \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_m$$

Komplexe Zahlen

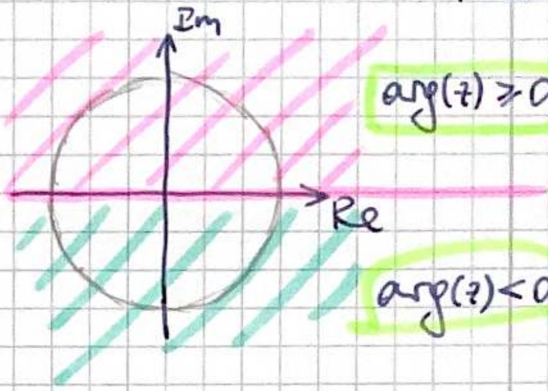
$\boxed{\bar{z}}$ komplex konjugierte Zahl „complex conjugate" $\boxed{z^*}$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

$$|z + w| = |z| + |w|$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$



$\arg(z) \geq 0$ $\quad b \geq 0$

$\arg(z) < 0$ $\quad b < 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i \cdot \sqrt{|D|} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{C}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - i \cdot \sqrt{|D|}$$

Potenzgesetze gelten nur für reelle positive Basen